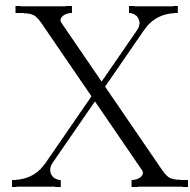




Enseignant: Mathieu Huruguen  
Algèbre Linéaire - CMS  
14 avril 2022  
Durée : 105 minutes



# Contrôle 3 (Enoncé)

SCIPER: XXXXXX

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 12 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre **carte d'étudiant.e** sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout **outil électronique** est **interdite** pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix unique**, on comptera :
  - les points indiqués si la réponse est correcte,
  - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  - 0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les brouillons ne sont pas à rendre: ils ne seront pas corrigés.

Respectez les consignes suivantes   Observe this guidelines   Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse   select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse   NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse   Correct an answer Antwort korrigieren
  		 
ce qu'il ne faut <b>PAS</b> faire   what should <b>NOT</b> be done   was man <b>NICHT</b> tun sollte		
     		



## Première partie, questions à choix unique

Pour chaque énoncé proposé, plusieurs questions sont posées. Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

### Énoncé

On donne l'application linéaire:

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \rightarrow (-x - z, y + 2z, 3x + y + 5z).$$

**Question 1** (1 point) Quelle est l'image de  $(-1, -3, 1)$  par l'application linéaire  $f \circ f - 4f - 2\text{id}_{\mathbb{R}^3}$ ?

☐  $(2, 5, 1)$ ☐  $(1, 3, -5)$ ☐  $(4, -3, 6)$ ☐  $(3, 7, -4)$ 

**Question 2** (2 points) Parmi les équations suivantes, sélectionner celle qui décrit un plan vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  contenant  $\text{Ker}(f \circ f)$ .

☐  $3x + y + 5z = 0$ ☐  $x + y + 3z = 0$ ☐  $2x + y + 4z = 0$ ☐  $x - y + z = 0$ 

**Question 3** (1 point) Parmi les éléments suivants de  $\mathbb{R}^3$ , sélectionner celui qui possède (au moins) un antécédent par  $f$ .

☐  $(1, 5, 2)$ ☐  $(2, -1, 4)$ ☐  $(3, 1, 5)$ ☐  $(-1, 2, 6)$

**Enoncé**

On donne une application linéaire  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  non nulle vérifiant :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \text{ et } 2x - 3y + 5z = 0 \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(\{(x, y, z)\}) = \emptyset.$$

**Question 4** (1 point) Que vaut le rang de  $f$  ?

☐ 2☐ 0☐ 3☐ 1

**Question 5** (2 points) On sait que l'une des matrices suivantes est égale à :

$$[f]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_{\text{can}}}$$

où  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathcal{B}_{\text{can}}$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . Laquelle ?

☐  $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

☐  $\begin{pmatrix} 7 & -7 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

☐  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

☐  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$



### Enoncé

On donne les deux bases suivantes de  $\mathbb{R}^3$ :

$$\mathcal{B} = (2, 0, 1), (0, -1, 3), (1, 0, 1) \quad \mathcal{B}' = (5, 2, -1), (3, 1, 0), (2, 0, 0)$$

et l'application linéaire  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  vérifiant:

$$[f]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Question 6** (2 points) Que vaut le déterminant de  $f$  ?

☐ 1

☐  $-\frac{1}{2}$

☐ -2

☐ 4

**Question 7** (2 points) Parmi les triplets suivants, sélectionner celui qui est égal à  $f(5, 2, -1)$ .

☐ (1, 0, 1)

☐ (8, 2, 0)

☐ (7, 2, -1)

☐ (1, 0, -1)



## Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

**Question 8:** *Cette question est notée sur 7 points.*

☐<sub>0</sub>    ☐<sub>1</sub> ☐<sub>2</sub> ☐<sub>3</sub> ☐<sub>4</sub> ☐<sub>5</sub>    ☐<sub>6</sub> ☐<sub>7</sub>

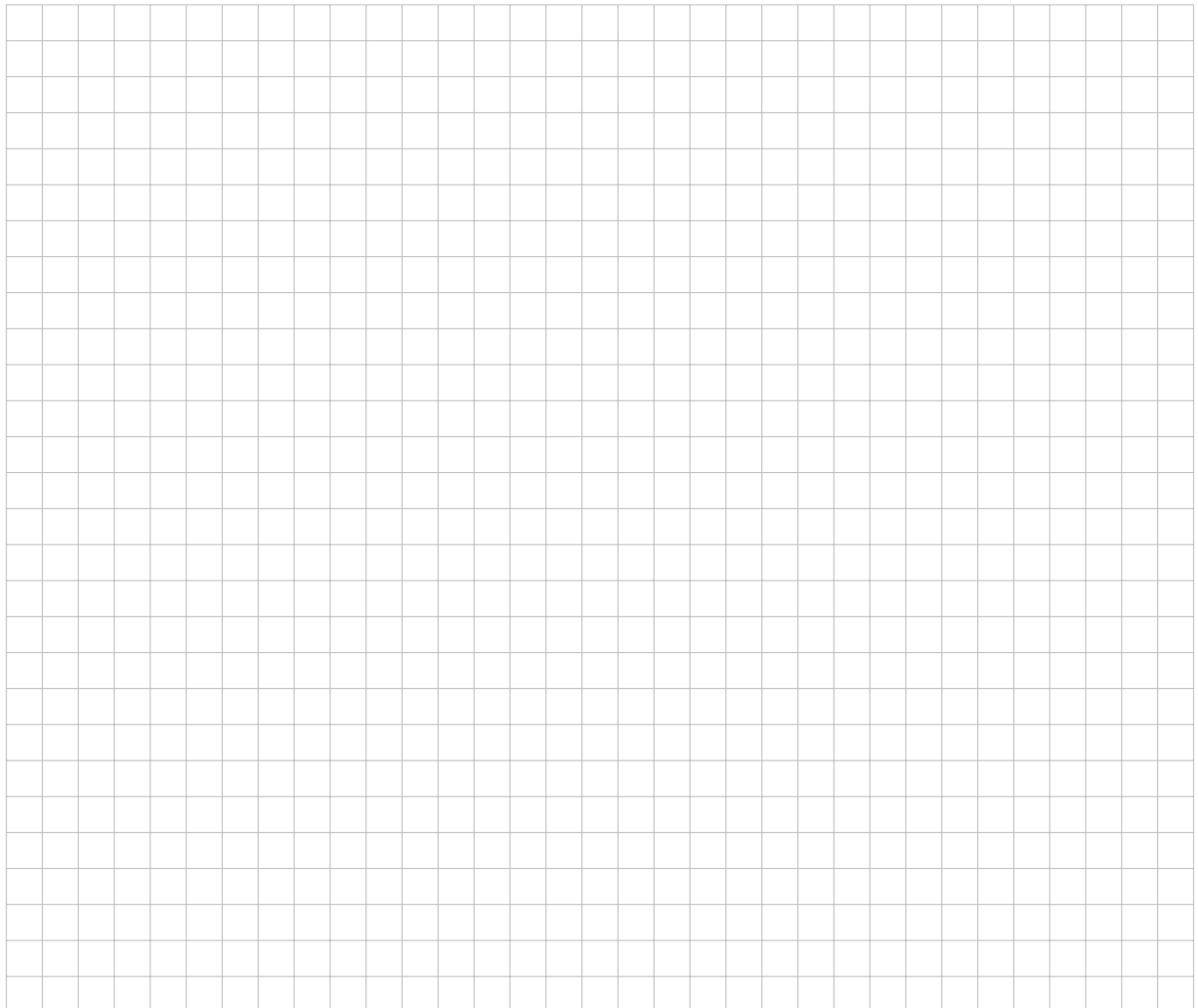
On donne les éléments suivants de  $\mathbb{R}^3$ :

$$v_1 = (2, 1, -5), \quad v_2 = (3, 1, 2), \quad v_3 = (1, 0, 3).$$

- (a) Montrer que la famille  $\mathcal{B} = v_1, v_2, v_3$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
- (b) Pour tout  $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , calculer  $[v]_{\mathcal{B}}$  et écrire la décomposition correspondante de  $v$  sur  $\mathcal{B}$ .
- (c) Vérifier la décomposition trouvée au (b) dans le cas particulier où  $v = (1, 0, 0)$ .
- (d) Déterminer un élément  $v_4$  de  $\mathbb{R}^3$  tel que la famille:

$$\mathcal{B}' = v_1, v_3, v_4$$

est une base de  $\mathbb{R}^3$  dans laquelle la deuxième et la troisième coordonnée de  $v_2$  sont égales.





+1/6/55+







+1/8/53+







**Question 9:** *Cette question est notée sur 7 points.*

<input type="text"/>	.	<input type="text"/>	.	<input type="text"/>	.	<input type="text"/>	.	<input type="text"/>	.	<input type="text"/>	.	<input type="text"/>	.	<input type="text"/>	.	<input type="text"/>	.	<input type="text"/>	.
<input type="text"/>	0	<input type="text"/>	1	<input type="text"/>	2	<input type="text"/>	3	<input type="text"/>	4	<input type="text"/>	5	<input type="text"/>	6	<input type="text"/>	7				

On donne les applications linéaires  $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définies par les formules suivantes:

$$f(x, y, z) = (4x+20y+8z, -x-5y-2z, 2x+10y+4z) \quad \text{et} \quad g(x, y, z) = (4x+4y+3z, -5x+6y-z, 3x+2y+2z).$$

- (a) Quel est le rang de  $f$ ? Donner une base de  $\text{Ker } f$ .
- (b) Ecrire la matrice de  $g$  en base canonique et en déterminer une décomposition colonne-ligne minimale.
- (c) Sans aucune justification, donner une application linéaire  $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  de rang 2 vérifiant:

$$f \circ h = 0 \quad \text{et} \quad \text{Ker}(g + h) = \text{Ker } g.$$

